Библиографический список

I. Лаптев Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семинара/ ВИНИТИ. М., 1966. Т.I. С.139-189.

2. Лумисте Ю.Г. Связности в однородных расслоениях // Матем. сб. 1966. Т.69. С.434-469.

3. Лумисте Ю.Г. Матричное представление полуголономной дифференциальной группы и структурные уравнения расслоения p-реперов // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т.5. С.239-257.

4. Лумисте Ю.Г. Связности в расслоенных пространствах с однородными слоями. Тарту, 1977. 64 с.

5. Акивис М.А. Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977. 84 с.

6. Лаптев Г.Ф. О внутренних геометриях многообразий, вмещенных в многомерное аффинное пространство. Диссертация. М., 1941. 103 с.

7. Рыбников А.К. Соприкасающиеся пространства и связности. I // Вестник МГУ. Мат., мех. 1979. № 6. С.44-48.

8. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т.9. 248 с.

9. Рыбников А.К. Об обобщенных аффинных связностях второго порядка // Изв. вузов. Матем. 1983. № I. С.73-80.

10. Вагнер В.В. Теория составного многообразия // Тр. семинара по вект. и тенз. анализу. М.; Л, 1950. Вып.8. С.11-72.

11. Шевченко Ю.И. Связность в продолжении главного расслоения // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1991. Вып.22. С.117-127.

12. Шевченко Ю.И. Связность в составном многообразии и ее продолжение // Там же. 1992. Вып.23. С.110-118.

13. Ehresmann C. Extension du calcul des jets aux jets non holonomes // C. r. Acad. Sci. 1954. V.239. N 25. P. 1762-1764.

14. Gheorghiev Gh. Sur les groupes de Lie associes aux prolongements reguliers d'une varieté differentiable // C. r. Acad. Sci. 1967. V. 265. N 23. P. A779-A782.

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК С ДВУМЯ ТРЕХКРАТНЫМИ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

С.В.Шмелева

(Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота)

В трехмерном проективном пространстве рассматриваются подклассы конгруэнций $\mathcal{K}_{3,3}$ невырожденных линейчатых квадрик Q, имеющих две невырождающиеся фокальные поверхности $(\mathcal{A}_0)$ и $(\mathcal{A}_3)$, кратность каждой из которых не ниже трех, причем линии на этих поверхностях, огибаемые пересекающимися прямолинейными образующими квадрики Q, соответствуют. Доказаны теоремы существования и установлены геометрические свойства исследуемых подклассов.

I. Пусть $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ – точки пересечения прямолинейных образующих квадрики $Q \in \mathcal{K}_{3,3}$, проходящих через трехкратные фокальные точки $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_3$. Тогда система уравнений Пфаффа конгруэнции $\mathcal{K}_{3,3}$ запишется в виде (см. (I,2) из [1]):

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^0 = 0, \quad \omega_i^j = a_{ik}^j\,\omega^k, \quad \omega_i^3 - \omega^j = c_{ik}\,\omega^k, \\ \omega_i^0 - \omega_3^j = \lambda_{ik}\,\omega^k, \quad \omega_3^i = b_i^i\,\omega^i, \quad \Omega = h_k\,\omega^k, \end{cases} \tag{I.I}$$

где

$$\begin{cases} \omega^i \stackrel{def}{=} \omega_0^i, \quad \Omega \stackrel{def}{=} \omega_0^0 - \omega_1^1 + \omega_3^3 - \omega_2^2, \\ c_{12} = c_{21}, \quad b_1^1\lambda_{12} - b_2^2\lambda_{21} = 0, \quad b_1^1 b_2^2 \neq 0, \end{cases} \tag{I.2}$$

$i,j,k = 1,2$ и по индексам i и j здесь и в дальнейшем суммирование не производится.

Обозначим:

$$\begin{cases} c = c_{11}c_{22} - c_{12}^2, \quad p_i = c_{ij}a_{jj}^i - c_{jj}a_{ji}^i, \quad q_i = c_{ii}a_{jj}^i - c_{ij}a_{ji}^i, \\ \lambda = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}, \quad \ell_i = \lambda_{ij}a_{ii}^j - \lambda_{ii}a_{ij}^j, \quad v_i = \lambda_{ii}a_{jj}^i - \lambda_{ij}a_{ji}^i, \\ w_i = \lambda_{ji}h_i - \lambda_{jj}h_i, \quad s_i = h_i a_{ij}^j - h_j a_{ii}^j, \quad t_i = c_{ii}\lambda_{ij} - c_{ij}\lambda_{ii}, \\ r_i = c_{ij}h_j - c_{jj}h_i. \end{cases} \tag{I.3}$$

Используя формулы (7), (I2) из [2], характеризующие трехкратность фокальной поверхности $(\mathcal{A}_0)$, и аналогичные им формулы для трехкратной фокальной поверхности $(\mathcal{A}_3)$, получим:

$$\begin{cases} c p_i = 0, & c(t_j - s_j) + q_i^2 - p_i(q_j + \tau_j) = 0, \\ \lambda \ell_i = 0, & v_j^2 - \lambda(t_i + s_i) - \ell_i(v_i + w_i) = 0. \end{cases} \qquad (\mathrm{I}.4)$$

Исключим из рассмотрения конгруэнции, у которых точки $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_3$ являются фокальными точками второго порядка [3]. Тогда

$$c\lambda \neq 0. \qquad (\mathrm{I}.5)$$

Потребуем, чтобы точки $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{A}_3$ и $\mathcal{A}_i$ были полярно сопряжены относительно ассоциированной квадрики Q_i [1, с.44]:

$$h_i x^1 x^2 - a^j_{ii}(x^i)^2 - a^i_{ji}(x^j)^2 + \lambda_{ki} x^k x^3 + c_{ki} x^k x^0 = 0. \qquad (\mathrm{I}.6)$$

Тогда

$$c_{11} = 0,\ c_{22} = 0,\ \lambda_{11} = 0,\ \lambda_{22} = 0,\ \lambda_{12}\lambda_{21}c_{12} \neq 0. \qquad (\mathrm{I}.7)$$

Назовем конгруэнции $K_{3,3}$, удовлетворяющие этим условиям, конгруэнциями B.

В силу (I.7) конечные соотношения (I.2), (I.4) запишутся в виде:

$$\begin{cases} c_{12} = c_{21},\ b_1^1\lambda_{12} - b_2^2\lambda_{21} = 0,\ a^2_{11} = 0,\ a^1_{22} = 0,\ a^1_{21}(a^1_{21} + h_2) = 0, \\ a^2_{12}(a^2_{12} + h_1) = 0,\ a^1_{21}(\lambda_{21}h_2 + \lambda_{12}a^1_{21}) = 0,\ a^2_{12}(\lambda_{12}h_1 + \lambda_{21}a^2_{12}) = 0. \end{cases} \qquad (\mathrm{I}.8)$$

Продолжая уравнения

$$\omega_1^3 = (1 + c_{12})\omega^2,\quad \omega_2^3 = (1 + c_{12})\omega^1, \qquad (\mathrm{I}.9)$$

получим

$$dc_{12} + (1 + c_{12})(\Omega + 2a^2_{12}\omega^1 + 2a^1_{21}\omega^2) = 0. \qquad (\mathrm{I}.10)$$

2. Анализируя систему (I.8) и учитывая возможность замены индексов I и 2 в уравнениях (в силу равноправия вершин $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$), убеждаемся, что существуют только четыре попарно непересекающихся класса конгруэнций B : конгруэнции $\mathfrak{A}_1$, определяемые соотношениями:

$$a^1_{21} = 0,\ a^2_{12} = 0,\ b_1^1 = b_2^2,\ \lambda_{12} = \lambda_{21}, \qquad (2.\mathrm{I})$$

конгруэнции $\mathfrak{A}_2$, для которых

$$a^1_{21} = 0,\ a^2_{12} = 0,\ \lambda_{12} = c_{12}b_2^2,\ \lambda_{21} = c_{12}b_1^1,\ b_1^1 - b_2^2 \neq 0, \qquad (2.2)$$

конгруэнции B_1, характеризуемые условиями:

$$a^2_{12} = -h_1 \neq 0,\ a^1_{21} = 0,\ \lambda_{12} = \lambda_{21},\ b_1^1 = b_2^2, \qquad (2.3)$$

и конгруэнции B_2, для которых

$$a^2_{12} = -h_1 \neq 0,\ a^1_{21} = -h_2 \neq 0,\ \lambda_{21} = \lambda_{12},\ b_1^1 = b_2^2. \qquad (2.4)$$

Конгруэнции $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ исследованы в [4]. Каждый из этих подклассов определяется с произволом одной функции двух аргументов. Фокальные поверхности $(\mathcal{A}_0)$ и $(\mathcal{A}_3)$, ассоциированные с конгруэнцией $\mathfrak{A}_1$, являются линейчатыми квадриками, фокальные поверхности $(\mathcal{A}_1)$ и $(\mathcal{A}_2)$ вырождаются в линии, а прямолинейная конгруэнция $(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3)$ вырождается в связку прямых. Для конгруэнций $\mathfrak{A}_2$ фокальные поверхности $(\mathcal{A}_0)$ и $(\mathcal{A}_3)$ являются одной и той же линейчатой квадрикой, пересекающейся с квадрикой $Q \in \mathfrak{A}_2$ по четырем прямым $\mathcal{A}_0\mathcal{A}_i$, $\mathcal{A}_3\mathcal{A}_i$.

3. Рассмотрим конгруэнции B_1. Учитывая (2.3) и продолжая систему (I.I), (I.6), убеждаемся, что конгруэнции B_1 определяются системой уравнений Пфаффа:

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0,\ \omega_3^0 = 0,\ \omega_1^2 + h_1\omega^2 = 0,\ \omega_2^1 = 0,\ \omega_i^3 = (1 + c_{12})\omega^j, \\ \omega_i^0 + b_1^1\omega_i^3 = 0,\ \omega_3^i = b_1^1\omega^i,\ \Omega = h_k\omega^k, \\ db_1^1 = b_1^1(\omega_3^3 - \omega_0^0),\ dc_{12} = (1 + c_{12})(h_1\omega^1 - h_2\omega^2), \\ dh_1 = h_1(\omega_1^1 - \omega_0^0) + h_1^2\omega^1, \end{cases} \qquad (3.\mathrm{I})$$

замыкание которой приводится к одному квадратичному уравнению:

$$(dh_2 + h_2(\omega_0^0 - \omega_2^2)) \wedge \omega^2 - h_1h_2\,\omega^1 \wedge \omega^2 = 0. \qquad (3.2)$$

Следовательно, конгруэнции B_1 определяются с произволом одной функции одного аргумента.

Т е о р е м а I. Поверхности $(\mathcal{A}_1)$ и $(\mathcal{A}_2)$, ассоциированные с конгруэнцией B_1, вырождаются в линии, касательные к которым пересекаются.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим:

$$\bar{M} = (1 + c_{12})(\bar{A}_3 - b_1^1\bar{A}_0) - h_1\bar{A}_2. \qquad (3.3)$$

Имеем:

$$d\bar{A}_1 = \omega_1^1\bar{A}_1 + \omega^2\bar{M},\quad d\bar{A}_2 = (\omega_2^2 + h_1\omega^1)\bar{A}_2 + \omega^1\bar{M}_1.$$

Т е о р е м а 2. Прямолинейная конгруэнция $(\mathcal{A}_0\mathcal{A}_3)$, ассоциированная с конгруэнцией B_1, вырождается в связку прямых с центром в точке

$$\bar{C} = -b_1^1\bar{\mathcal{A}}_0 + \bar{\mathcal{A}}_3. \qquad (3.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем:

$$d\bar{C} = \omega_3^3\bar{C}. \qquad (3.5)$$

4. Конгруэнции B_2 определяются системой уравнений Пфаффа (I.I) и конечными соотношениями (2.4).
Осуществляя последовательные продолжения системы, приходим к вполне интегрируемой системе уравнений Пфаффа:

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^0 = 0, \quad \omega_i^j + h_i \omega^j = 0, \quad \omega_i^3 = (1 + c_{12})\omega^j, \\ \omega_i^0 - \omega_3^j = \lambda_{12}\omega^j, \quad \Omega = h_k \omega^k, \quad \omega_3^i = b_i^i \omega^i, \quad dc_{12} = (1 + c_{12})\Omega, \\ db_1^1 = b_1^1 (\omega_3^3 - \omega_0^0), \quad d\lambda_{12} = \lambda_{12}(\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_0^0) + (b_1^1 + 2\lambda_{12})\Omega, \\ dh_1 = h_1(\omega_1^1 - \omega_0^0) + h_1^2 \omega^1 + h_0 \omega^2, \\ dh_2 = h_2(\omega_2^2 - \omega_0^0) + h_0 \omega^1 + h_2^2 \omega^2, \\ dh_0 = h_0(\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_0^0) + (2b_1^1 + \lambda_{12} + h_0 + b_1^1 c_{12})\Omega. \end{cases} \tag{4.I}$$

Эта система определяет конгруэнции B_2 с произволом постоянных.

Т е о р е м а 3. Фокальное многообразие квадрики $Q \in B_2$ состоит из точек A_0, A_3 и коники, плокость которой не содержит эти точки.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система уравнений для определения фокальных точек квадрики $Q \in B_2$ приводится к виду:

$$x^1 x^2 - x^0 x^3 = 0, \quad x^1 f = 0, \quad x^2 f = 0, \tag{4.2}$$

где

$$f \overset{def}{=} c_{12} x^0 + h_1 x^1 + h_2 x^2 + \lambda_{12} x^3. \tag{4.3}$$

Следовательно, квадрика $Q \in B_2$ содержит, кроме фокальных точек A_0 и A_3, еще фокальную конику:

$$x_1^1 x^2 - x^0 x^3 = 0, \quad f = 0. \tag{4.4}$$

Т е о р е м а 4. Прямолинейная конгруэнция $(A_0 A_3)$, ассоциированная с конгруэнцией B_2, вырождается в связку прямых с центром в точке C (см.(3. 4)).

Действительно, для конгруэнции p_2 также справедлива формула (3.5).

Библиографический список

I. Ш м е л е в а С.В. Об одном классе конгруэнций линейчатых квадрик с фокальными поверхностями R // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1990. Вып.2I. С.I05--I09.

2. М а л а х о в с к а я С.В. Конгруэнции линейчатых

квадрик с кратной фокальной поверхностью // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, I98I. Вып.I2. С.44-47.

3. М а л а х о в с к а я С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с невырождающимися фокальными многообразиями высших порядков // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, I982. Вып.I3. С.60-64.

4. Ш м е л е в а С.В. Конгруэнции $\mathfrak{A}$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, I988. Вып.I9. С.I27-I30.

5. Ш м е л е в а С.В. Об одном классе конгруэнций линейчатых квадрик с нераспадающейся фокальной коникой // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, I993. Вып.24. С.I23--I26.